Serie 10

1. Die Menge
$$M=\left\{ f_1(x)=x, f_2(x)=\frac{1}{x}, f_3(x)=-x, f_4(x)=-\frac{1}{x} \right\}$$
bildet mit der Operation
$$\circ : (f_k \circ f_i)(x) = f_k(f_i(x)),\, i=1,\ldots,4$$
die Struktur $S_1=(M;\circ)=M(\circ)$ und die Menge
$$N=\{\,(1,1);(1,-1);(-1,1);(-1,-1)\,\}$$
bildet mit der Operation
$$\star : (a,b)\star(c,d)=(ac,bd)$$
die Struktur $S_2=(N;\star)=N(\star)$.

   (a) Geben Sie einen Isomorphismus
   $$\varphi : (M;\circ)\to(N;\star)$$
   in der Form
   $$\varphi(f)=(\varphi_1(f),\varphi_2(f))$$
   an.

   (b) Finden Sie 2-stellige Relationen R_1 und R_2 für S_1 und S_2, so dass der gefundene Isomorphismus auch Isomorphismus von $(M;\,R_1,\circ)$ auf $(N;\,R_2,\star)$ ist.

2. Untersuchen Sie die folgenden Strukturen auf ihre algebraischen Eigenschaften (Ring, kommutativer Ring, Ring mit neutralem Element (Einselement), Körper).

   (a) $(M;+,\cdot)$ mit $M=\left\{ m+n\sqrt{5} \mid m,n\in\mathbb{Z} \right\}$ und
   $+,\cdot$ sind die Addition und Multiplikation reeller Zahlen;

   (b) $(\mathbb{C};\oplus,\circ)$ mit $\mathbb{C}=\{\,(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\,\}$ und
   $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ sowie $(a,b)\circ(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

3. Es seien $\mathbb{C}_R=\{\,(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\,\}$ und $\mathbb{C}_L=\{\,(0,b)\mid b\in\mathbb{R}\,\}$.

   (a) Welche der beiden Mengen bildet einen Unterkörper von $(\mathbb{C};\oplus,\circ)$?
   Es seien $Re:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ mit $Re((a,b))=a$ und $Id:\mathbb{C}_R\to\mathbb{R}$ mit $Id((a,0))=a$ Abbildungen von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}_R$ in $\mathbb{R}$.

   (b) Welche der beiden Abbildungen bildet einen Homo- oder Isomorphismus von $(\mathbb{C};\oplus,\circ)$ bzw. $(\mathbb{C}_R;\oplus,\circ)$ in $(\mathbb{R};+,\cdot)$?

4. Zeigen Sie, dass $M_5=\left\{ m+n\sqrt{5} \mid m,n\in\mathbb{Z},\, 5|m,\, 5|n \right\}$ ein Ideal in $(M;+,\cdot)$ ist. Wie lauten die zugehörigen Kongruenzklassen?