Serie 11

1. Ist in einem kommutativen Ring $(R;+,\cdot)$ ohne Nullteiler die Division mit Rest erklärt (Euklidischer Ring), so kann der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente dieses Ringes ohne Primfaktorzerlegung bestimmt werden.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Polynome P mit

   $$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

   vom Grade höchstens n mit der üblichen Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ einen kommutativen Ring ohne Nullteiler bildet.

   (b) Zeigen Sie, dass in diesem Ring die Division mit Rest erklärt ist, es also zu zwei beliebigen Nicht-Null-Polynomen P_1, P_2 zwei eindeutig bestimmte Polynome Q_1, Q_2 mit

   $$P_1 = Q_1 \cdot P_2 + Q_2$$

   gibt, wobei der Grad von P_2 größer als der von Q_2 ist.

   (c) Bestimmen Sie algorithmisch unter Nutzung der Division mit Rest den ggT von

   $$x^4 - x^3 - 3x^2 - x + 4 \text{ und } x^3 + x^2 + x - 3.$$

   (Hinweis: Euklidischer Algorithmus.)

2. Zeigen Sie, dass die Menge aller (m,n)-Matrizen einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen bildet.

3. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^3$ sind:

   (a)
   $$M = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{array} \right) \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

   (b)
   $$M = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ ax \\ b^2 x + c^2 y \end{array} \right) \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$