Serie 14

1. Gegeben sei die Matrizengleichung $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 3\alpha & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Geben Sie die Lösung $\boldsymbol{X}$ der Matrizengleichung für allgemeines α an.

   (b) Wie lautet die Lösung für $\alpha = 0$?

   (c) Für welche Werte von α ist die Matrizengleichung nicht lösbar?

2. Lösen Sie $\text{Det}(\boldsymbol{A}) = 27$ und $\text{Det}(\boldsymbol{B}) = 2$ für

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & x & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & -1 \\ 4 & x & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie die inverse Matrix von

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Lösen Sie $\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_n$ für gerades n und $\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_n$ für ungerades n.