Serie 2

1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

   (a) Für beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$;

   (b) für beliebige $x \in (0,1) := \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $\sum\limits_{i=0}^{n} x^i < \dfrac{1}{1-x}$;

   (c) für beliebige $m \in \mathbb{N}$ ist $m^3 + 2m$ durch 3 teilbar;

   (d) für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$, gilt:

   $(1+a)^n \geqq 1 + na$;

   die strenge Ungleichung gilt genau dann, wenn $a \neq 0$.
   (Mit $\mathbb{N}$ wird die Menge der natürlichen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.)

2. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

   (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n-1)^2 + n + 40$ eine Primzahl.

   (c) Es sei (a_k) eine arithmetische Zahlenfolge, deren Glieder a_k von Null verschieden sind. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqq 2$ gilt:

   $$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{k-1}{a_1 \cdot a_k}$$

3. Skizzieren Sie folgende Mengen, wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$:

   (a) $M_1 = \left\{ (x,y) \mid y + 1 \geqq x \right\}$,

   (b) $M_2 = \left\{ (x,y) \mid y = -x^2 \right\}$,

   (c) $M_3 = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$,

   (d) $M_4 = \left\{ z \mid z^2 < \frac{1}{2} \right\}$ sowie
   $M_1 \cap M_2$, $M_2 \cap M_3$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cup M_3$, $M_1 \setminus M_3$, $M_3 \setminus M_2$
   und $M_3 \times M_4$.