Serie 23

1. Untersuchen Sie die Folge von Funktionen (f_n) auf gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie die zugehörige Grenzfunktion:

   (a)
   $$f_n(x) = \frac{1}{1+e^{n(a-x)}} \quad \text{mit}\, x \in (a,\infty),$$

   (b)
   $$f_n(x) = \frac{1}{1+e^{nx}} \quad \text{mit}\, x \in (1,\infty),$$

   (c)
   $$f_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{mit}\, x > o.$$

2. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leqq a \\ 2+bx^2 & \text{für} \quad x > a \end{cases}$$

   stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist.

3. Bestimmen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:

   (a) $f(y) = \frac{b+ay}{(b-ay)^c}$ mit $y \neq \frac{b}{a}$,

   (b) $g(x) = \frac{1}{\log_2(x^2)}$ mit $x \neq 0$.

4. Für differenzierbare Funktionen f mit nur positiven Funktionswerten gilt die Regel

   $$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

   Berechnen Sie mit Hilfe dieser Regel die 1. Ableitung von:

   (a) $f(x) = (\tan x)^x$,

   (b) $f(x) = \sin x^{x-1} \quad (x > 0)$,

   (c) $f(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x-1}}{x^3(x-2)^2}$.