Serie 4

1. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $P(M)$ jeder endlichen Menge M mächtiger als M ist.

2. Überprrüfen Sie, ob durch folgende Vorschriften **R** Äquivalenz- bzw. Halbordnungsrelationen über der Menge M definiert werden.

   (a) $M = \mathbb{N}, \quad x\,\mathbf{R}\,y \iff x + y$ gerade

   (b) $M = \mathbb{N}, \quad x\,\mathbf{R}\,y \iff x + y$ ungerade

   (c) $M = \mathbb{N}, \quad x\,\mathbf{R}\,y \iff x \leqq y$

   (d) $M = \mathbb{Z}, \quad x\,\mathbf{R}\,y \iff x - y$ durch 3 teilbar

   (e) $M = \mathbb{N}, \quad x\,\mathbf{R}\,y \iff x$ ist das Quadrat von y

3. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen **T** über der betreffeden Menge X Äquivalenzrelationen sind und veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.

   (a) $X = \mathbb{N}, \quad m\,\mathbf{T}\,n \iff \sin\frac{\pi m}{2} \cdot \sin\frac{\pi n}{2} > 0$ oder $|\sin\frac{\pi m}{2}| + |\sin\frac{\pi n}{2}| = 0$;

   (b) $X = \mathbb{R}, \quad x\,\mathbf{T}\,y \iff [x] = [y]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl z mit $z \leqq x$ bedeutet;

   (c) $X = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\,\}$,
   $(x_1,y_1)\,\mathbf{T}\,(x_2,y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$;

   (d) X sei die Menge aller Geraden einer affinen Ebene,
   $g_1\,\mathbf{T}\,g_2 \iff g_1 \cap g_2 = \emptyset$ oder $g_1 = g_2$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : X \to Y$ auf ihre Eigenschaften:

   (a) $X = [0,1], \quad Y = [-\frac{1}{8}, 1], \quad f(x) = 2x^2 - x$;

   (b) $X = [1,2], \quad Y = [1,3], \quad f(x) = |x|$;

   (c) $X = [-1,1], \quad Y = [0,1], \quad f(x) = |x|$.