Serie 6

1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt linear, wenn gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2).$$

   Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind.

   (a) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 4;$

   (b) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x;$

   (c) $X = [-3, 4], Y = \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x;$

   (d) X sei die Menge aller differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $Y = X$,
   f : jede Funktion $\in X$ wird auf ihre Ableitung abgebildet.

2. Zeigen Sie, daß die Verknüpfung von Abbildungen assoziativ ist.

3. Es seien $f : M \to N, \quad g : N \to P, \quad g \circ f : M \to P$ Abbildungen.
   Zeigen Sie:

   (a) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

   (b) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

   (c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.