Serie 7

1. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen Funktionen sind.
   (a) $F_1 = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$ und $F_2 = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$;
   (b) $F_3 = \left\{(x,y) \in M^2 \mid xy = 4\right\}$ mit $M = \{0,1,2,3,4,5\}$;
   (c) $F_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2y = x-1\right\}$ sowie
   (d) $F_5 = F_1^{-1}, F_6 = F_2^{-1}, F_7 = F_3^{-1}$ und $F_8 = F_4^{-1}$.

2. Stellt die Einteilung der Menge aller Dreiecke einer Ebene
   (a) in rechtwinklige, spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke,
   (b) in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige Dreiecke

   eine Klasseneinteilung dar?

3. Zeigen Sie, daß die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Operation
   $\circ$: $m \circ n = \text{ggT}(m,n)$ eine Halbgruppe bildet.
   Besitzt $(\mathbb{N};\circ)$ ein neutrales Element?

4. Es sei $M = \left\{m + n\sqrt{5} \mid m,n \in \mathbb{Z}\right\}$. Zeigen Sie:
   (a) $(M;+)$ ist eine kommutative Gruppe.
   (b) $(M;\cdot)$ ist eine Halbgruppe.

5. Eine Restklasse $[k]_R$ bezüglich der Division durch m sei die Menge der ganzen Zahlen, die bei der Division durch m denselben Rest lassen wie die Zahl k. Die Menge dieser Restklassen wird mit $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet. In $\mathbb{Z}_m$ seien die folgenden Operationen $\oplus$ und $\odot$ definiert:

$$[k]_R \oplus [n]_R = [k+n]_R \quad \text{und} \quad [k]_R \odot [n]_R = [k \cdot n]_R$$

   (a) Bilden $(\mathbb{Z}_m;\oplus)$ bzw. $(\mathbb{Z}_m;\odot)$ eine Halbgruppe oder eine Gruppe?
   (b) Für welche m hat $(\mathbb{Z}_m;\odot)$ Nullteiler?