Serie 9

1. Zeigen Sie, daß das neutrale Element einer algebraischen Struktur eindeutig bestimmt ist.

2. Zeigen Sie, daß $G = \{\, e^x \mid x \in \mathbb{R} \,\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation bildet.

3. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^+;\cdot) \to (\mathbb{R};+)$ an.

4. In der Menge $X = \left\{\, (1,0);(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3});(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3}) \,\right\}$ sei eine Operation $\circ$ mit $\circ : (a,b)\circ(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ erklärt.

   (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to X$ mit $f(n) = (\cos\frac{2\pi n}{3}, \sin\frac{2\pi n}{3})$ ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z};+)$ auf $(X;\circ)$ ist.

   (b) Welche Relation induziert f?

   (c) Beschreiben Sie die durch f erzeugte Faktorstruktur.

   (d) Zeigen Sie die Isomorphie zwischen der Faktorstruktur und $(X;\circ)$.

5. Gegeben seien die Gruppen $(\mathbb{Z};+)$ und $(\mathbb{Z}_3;+)$ sowie die Funktionen $\varphi,\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ mit $\varphi(k) = [2k]_3$ und $\psi(k) = [2+k]_3$.

   (a) Sind φ und ψ Homomorphismen?

   (b) Bilden Sie die Urbilder $\varphi^{-1}([0]_3)$ und $\psi^{-1}([0]_3)$ von $[0]_3$ bezüglich der Inversen φ und ψ beider Funktionen φ und ψ.

   (c) Zeigen Sie, daß $(\varphi^{-1}([0]_3);+)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z};+)$ ist.