Serie 2

1. Geben Sie in einer dreielementigen Menge $M = \{ a, b, c \}$ solche zweistelligen Operationen $\oplus$ und $\odot$ (z.B. durch Operationstabellen) an, so dass $(M; \oplus, \odot)$ ein Ring ist.

2. Zeigen Sie, dass $K_3 = \left\{ a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Z}, 3|a, 3|b \right\}$ ein Ideal in $(K; +, \cdot)$ mit $K = \left\{ a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ist.

3. Gegeben seien die Ringe

$$\mathscr{R}_1 = (R_1; \oplus_1, \odot_1), \mathscr{R}_2 = (R_2; \oplus_2, \odot_2)$$

   und eine Abbildung

$$f : R_1 \to R_2.$$

   Unter welchen Bedingungen ist f Homomorphismus von $\mathscr{R}_1$ auf $\mathscr{R}_2$?

4. Zeigen Sie, dass die Menge $\{ f_1, f_2, f_3 \}$ der Abbildungen

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x}$$

   mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe bildet, indem Sie die Isomorphie zur Untergruppe $\{ (1), (123), (132) \}$ der Permutationsgruppe P_3 nachweisen.