Serie 3

1. Gesucht ist die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ der folgenden Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen des Vektorraumes der $(2,2)$-Matrizen über dem Körper der reellen Zahlen linear unabhängig sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

   (a) Stellen Sie den Vektor $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren dar.

   (b) Mit welchen Basisvektoren bildet der Vektor $\boldsymbol{a}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

4. Ermitteln Sie alle Werte für λ, für die das folgende Gleichungssystem nichttriviale Lösungen hat:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & 2z & = \lambda x \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = \lambda y \\ 2x & + & 2y & + & 5z & = \lambda z \end{array}$$

   Für den größten Wert von λ ist die Lösung zu ermitteln.